BNE-Aufgaben für den Mathematikunterricht

Titel: Hitzesommer

Einordnung gemäß Orientierungsrahmen für den Lernbereich Globale Entwicklungen:

Globales Entwicklungsziel	**SDG 13.1:** Die Widerstandskraft und die Anpassungsfähigkeit gegenüber klimabedingten Gefahren und Naturkatastrophen in allen Ländern stärken.
Kernkompetenzen Lernende können …	**Erkennen** 1.2 … grafische Darstellungen und Tabellen mit Daten zu globalen Fragen verstehen und auswerten. 2.3 … verstehen, dass unterschiedliche Modelle zu globalen Entwicklungen auch im gleichen Sachzusammenhang ggf. zu verschiedenen Ergebnissen führen, eventuell nur Teile korrekt beschreiben und daher Anpassungen immer wieder nötig sind. **Bewerten** 5.2 … sich der Implikationen mathematischer Modellierungen zu Fragen der globalen Entwicklung für sich und andere bewusst werden. **Handeln** 8.2 … sich in ihrem Denken zu eigen machen, dass man mit mathematischen Aussagen, Analysen und Prognosen zur Strukturierung und Meinungsbildung beitragen und persönliche Mitverantwortung für eine nachhaltige Entwicklung wahrnehmen kann.
mathematische Inhalte	Normalverteilung
einsetzbar ab	Jahrgangsstufe 12/13

Zusammenfassung

In der Aufgabe wird gezeigt, dass sich die Verteilung der Sommerdurchschnittstemperaturen in der Schweiz in den letzten 25 Jahren deutlich geändert hat.

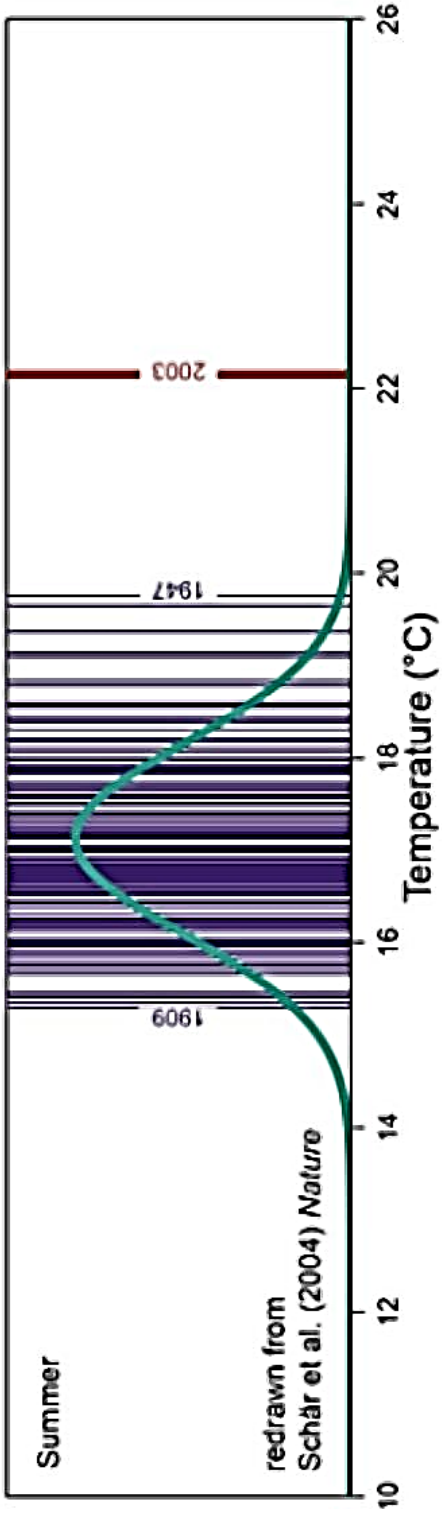
BNE-Aufgaben für den Mathematikunterricht

Titel: Hitzesommer

Aufgaben 1

In dieser Aufgabe geht es um den Hitzesommer 2003. Grundlage ist eine Aufsehen erregende Studie aus dem Jahr 2004. Alle nötigen Informationen dazu finden Sie in der Anlage 1.

a) Lesen Sie den Text in Anlage 1 genau und klären Sie ggf. unklare Begriffe.
b) Beschreiben Sie mit Ihren eigenen Worten, was die Grafik zeigt.
c) Suchen Sie das heißeste und kälteste Jahr bis 2000 heraus und lesen Sie näherungsweise die entsprechenden Sommerdurchschnittstemperaturen ab.
d) Welche Botschaft vermittelt Ihnen die Grafik? Formulieren Sie eine passende Überschrift.
e) Versuchen Sie diesen Eindruck mit den Mitteln der Mathematik zu quantifizieren.
    i. Lesen Sie den Erwartungswert μ näherungsweise ab, bitte benutzen Sie dazu ein Geodreieck o.ä.. Die Standardabweichung σ wird in der Originalveröffentlichung mit $\sigma = 0{,}94$ °C angegeben.
    ii. Berechnen Sie auf dieser Basis das 95%-Konfidenz-Intervall (symmetrisch zu μ) und beschreiben Sie seine Bedeutung.
    iii. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass heißere Sommerdurchschnittstemperaturen als 1947 auftreten.
    iv. Geben Sie den Abstand des 2003-Wertes von μ in Vielfachem von σ an und erklären Sie dessen Bedeutung im Sachzusammenhang.
f) Schreiben Sie auf, ob und ggf. welche neuen Erkenntnisse Ihnen die mathematischen Untersuchungen gebracht haben.



Anlage 1 zu Aufgabe 1: Hitzewelle 2003

2003 wurde Europa von einer starken Hitzewelle erfasst. Anfang 2004 veröffentlichten Christoph Schär und andere die nebenstehende Grafik in der Zeitschrift *Nature*. Sie zeigt die Verteilung der Sommer-durchschnittstemperaturen von 1864 bis 2000 für die Schweiz*) und zum Vergleich die von 2003.

*) Genau genommen haben die Wissenschaftler*innen den Durchschnittswert über vier Stationen (Bern, Zürich, Genf und Basel) berechnet.

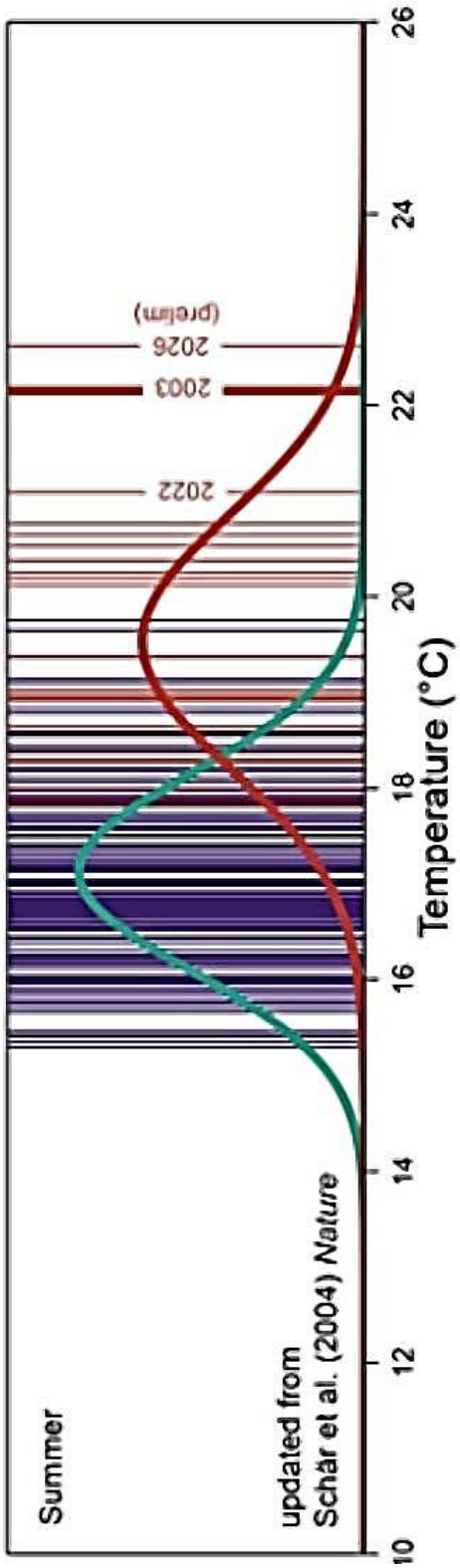
Aufgaben 2

2026 hat Erich Fischer von der ETH Zürich die Untersuchungen von Schär aufgegriffen und ein Update bis 2026 gemacht. Alle nötigen Informationen finden Sie in der Anlage 1 zu Aufgabe 2.

a) Beschreiben Sie, was die neue Grafik zeigt und welche neue Botschaft sie vermitteln könnte. Gehen Sie auch auf die Lage der beiden Gauß'schen Glockenkurven ein.
b) Schauen Sie sich zunächst die Durchschnittstemperaturberechnung genauer an.
   i. In Anlage 2 finden Sie die Tagestemperaturen (Mittelwert, Maximum, Minimum) der Station Basel. Berechnen Sie daraus die Sommerdurchschnittstemperatur für die Station Basel.
   ii. Für die andern drei Stationen sind die Werte Bern22,1 °C), Zürich (22,0 °C) und Genf (23,3 °C). Berechnen Sie daraus den Sommerdurchschnittswert für die Schweiz.
c) Für die weiteren quantitativen Untersuchungen brauchen Sie mathematische Grundlagen. Zeigen Sie daher zunächst allgemein: Die Dichtefunktion zur Normalverteilung $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ hat ihre Wendepunkte bei $x_{w1/2} = \mu \pm \sigma$.
   Tipp: Verwenden Sie für die hinreichende Bedingung das Vorzeichenwechsel-kriterium.
d) Ermitteln Sie nun auf dieser Basis aus der Grafik näherungsweise die entsprechenden Werte für die rote Kurve.
e) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis aus d, indem Sie z.B. die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Konfidenzintervall berechnen.
f) Rechnen Sie nach: Die Durchschnittstemperatur von 2003 ist auf der Basis der Zahlen seit 2003 gar nicht mehr so unwahrscheinlich.
g) Es gibt Wissenschaftler, die formulieren: „In 20 Jahren werden die heutigen Extremsommer eher der Normalfall sein." Kommentieren Sie diese Aussage vor dem Hintergrund Ihrer Berechnungen.
h) Ähnliche Sommertemperaturentwicklung hat man auch für Deutschland gefunden[1]. Versetzen Sie sich daher in die Rolle der Oberbügermeister*in Ihrer Stadt. Schreiben Sie auf, welche Schlussfolgerungen Sie aus der obigen Grafik ziehen und welche Maßnahmen Sie daraufhin entwickeln würden.
i) Recherchieren Sie, welche Maßnahmen in Ihrer Stadt/Kommune schon gemacht werden.

[1] (z.B. https://www.schweizerbart.de/papers/metz/detail/32/102966/Observed_temperature_trends_in_Germany

Anlage 1 zu Aufgabe 2 : Hitzewelle 2026



2026 hat Erich Fischer von der ETH Zürich die Untersuchungen von Schär aufgegriffen und ein Update bis 2026 gemacht. Die nebenstehende Grafik zeigt die alte, ergänzt um die Jahre 2003 bis 2026 (rot). Die zweite Normalverteilungskurve (rot) beschreibt die Verteilung der Sommertemperaturen dieser vierundzwanzig Jahre ganz gut.

Anlage 2 zu Aufgabe 2: Tagestemperaturen der Station Basel

Datum	Mittelwert	Maximum	Minimum
01.06.26	19,5	24,7	14,9
02.06.26	17,4	26	13,4
03.06.26	16	20,7	12,4
04.06.26	15,2	21,5	13,1
05.06.26	15,4	20,2	11
06.06.26	17,7	24,2	9,4
07.06.26	18,8	23,6	13,6
08.06.26	18,1	27,4	11,3
09.06.26	16,1	18,3	13,7
10.06.26	13,7	17,8	10,2
11.06.26	15,4	19,4	10,3
12.06.26	18,2	21,4	14,7
13.06.26	22,7	28,3	15,6
14.06.26	21,7	26,2	14,1
15.06.26	19,8	26,5	11,5
16.06.26	22,5	29,8	15,3
17.06.26	24,4	31,9	16,2
18.06.26	26,4	34,4	16,9
19.06.26	26,3	34,6	19,3
20.06.26	26,9	35,3	18,2
21.06.26	26,9	36,2	19,3
22.06.26	28	36,6	19,2
23.06.26	28,3	36,4	19,9
24.06.26	28,3	35,8	20,6
25.06.26	29,5	38	19,5
26.06.26	30,8	38,8	21,8
27.06.26	31,4	39	23
28.06.26	29,7	36	22,7
29.06.26	25,3	31,9	21,3
30.06.26	25,1	32,3	19,4
01.07.26	21	26,4	16,1
02.07.26	22,7	29,2	14,3
03.07.26	22,8	28,1	16,1
04.07.26	22,4	30	12,8
05.07.26	24,1	30,4	15,8
06.07.26	24,4	31,5	16,3
07.07.26	26,7	34,8	17,1
08.07.26	25,1	32,6	17,1
09.07.26	24,5	31,1	17,1
10.07.26	25,8	33,7	15,9
11.07.26	27,1	35,4	18,2
12.07.26	26,6	34,8	17,3
13.07.26	26,9	35,5	17,2
14.07.26	27,9	35,2	20,2
15.07.26	24,8	31,8	20

Datum	Mittel	Maximum	Minimum
16.07.26	24	33,4	18,5
17.07.26	23,7	30,3	18
18.07.26	23,4	30,8	16,8
19.07.26	20,6	26,5	15
20.07.26	19,3	26,5	12,3
21.07.26	18,7	25,9	11,7
22.07.26	20,8	27,6	11,2
23.07.26	20,4	26,6	14,2
24.07.26	21,2	29,7	11,8
25.07.26	24	31,6	13,6
26.07.26	25,1	29,4	19,7
27.07.26	23,5	28,6	17,2
28.07.26	24	32,9	14,4
29.07.26	28,3	37,4	17,9
30.07.26	27,9	39,7	20,4
31.07.26	27	34,6	18,4
01.08.26	24,9	31,1	20
02.08.26	26,3	34,6	17
03.08.26	29	37,6	22,5
04.08.26	27,3	37,8	20,7
05.08.26	26,4	32,7	19,8
06.08.26	25,3	32	19,4
07.08.26	23,6	30,3	17,6
08.08.26	24	33,4	14,2
09.08.26	25,9	35,9	18,7
10.08.26	25,9	32,8	19,3
11.08.26	25,8	34	18,4
12.08.26	25,3	34	16,3
13.08.26	26,6	36,5	15,8
14.08.26	28,3	38,1	17
15.08.26	28,2	35,8	21,8
16.08.26	25	31,5	19,9
17.08.26	21	25,9	18,6
18.08.26	23,8	29,8	18
19.08.26	26,5	34,4	17,5
20.08.26	23,6	27,8	18,7
21.08.26	17,1	21,2	12,9
22.08.26	17,3	23,6	12,5
23.08.26	17,9	25,6	10,3
24.08.26	18,6	25,7	10,9
25.08.26	19,8	26	15
26.08.26	22,5	29,6	17,1
27.08.26	24,2	31,8	17,2
28.08.26	20,8	24	16,4
29.08.26	20,3	25,9	14
30.08.26	22,4	28,3	17,7
31.08.26	20,5	26,1	15,8

Quelle: https://www.meteoswiss.admin.ch/services-and-publications/applications/ext/download-data-without-coding-skills.html

BNE-Aufgaben für den Mathematikunterricht

Lösungen

Aufgaben 1

a) Unklar könnte z.B. der Begriff Sommerdurchschnittstemperatur sein. Meteorologisch ist der Sommer als Zeitraum von Juni bis August definiert. Die entsprechende Durchschnittstemperatur ist der Mittelwert der Tagesdurchschnittstemperaturen für diesen Zeitraum, also in diesem Fall über die 92 Tage.

b) Die Grafik gibt die Sommerdurchschnittstemperaturen für die Jahre 1864 bis 2000 als blaue Striche. Wenn kein Wert fehlt, müssen es 2000 – 1864 + 1 = 137 sein. Davon abgehoben ist die entsprechende Temperatur für 2003 rot gekennzeichnet. Außerdem ist eine Gauß'sche Glockenkurve eingezeichnet, die die theoretische Verteilung der Sommertemperaturen beschreibt.

c) Durch möglichst genaues Ablesen findet man: Der heißeste Sommer vor 2003 war 1947, die Durchschnitttemperatur lag bei 19,8 °C, der kälteste 1909 mit etwa 15,3 °C.

d) Die Sommerdurchschnittstemperaturen sind verteilt. Die Temperatur 2003 fällt aus der Verteilung heraus.

e) Zur Quantifizierung kann man die zugrundeliegende Normalverteilung verwenden.

   i. Das Maximum liegt auf meinem Ausdruck etwa 1,2 cm von 16 °C entfernt. Da der Abstand von 16 °C bis 18 °C etwa 1,9 cm beträgt, ist $\mu \approx 16 + \frac{1{,}2}{1{,}9} \cdot 2 \approx$ 17,2. Der Erwartungswert für diese Verteilung liegt also bei etwa 17,2 °C.

   ii. $I_{95\%} = [\mu - 1{,}96\sigma; \mu + 1{,}96\sigma]$. Mit den abgelesenen Werten gilt dann hier $I_{95\%} = [15{,}4; 19{,}0]$. Bedeutung: Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % überdeckt dieses Intervall den wahren Wert.

   iii. Die Durchschnittssommertemperatur für 1947 lag ungefähr bei 19,8 °C. $P(X > 19{,}8) = 1 - P(X \leq 19{,}8) \approx 0{,}002 = 0{,}2\ \%$.

   iv. Der Ablesewert für 2003 liegt etwa bei 22,1 °C. Damit beträgt der Abstand von $\mu = 17{,}2$ °C rund 4,9 °C. Mit $\sigma = 0{,}94$ °C beträgt der Abstand etwa 5,2 σ. Die Wahrscheinlichkeit, dass Werte größer als $\mu + 5{,}2\sigma$ auftreten, ist $P(X > \mu + 5{,}2\sigma) = 1 - P(X \leq \mu + 5{,}2\sigma) < 10^{-7} = 0{,}00001\ \%$.

f) Die Berechnungen verstärken noch den Eindruck, dass der Sommer 2003 ein sehr großer Ausnahmefall war.

Aufgaben 2

a) Die neue Glockenkurve ist breiter und weniger hoch; d.h. die Durchschnittswerte verteilen sich mehr und sind extremer. Außerdem ist sie „nach rechts verschoben“. Daraus ergibt sich der Eindruck, dass die heutigen Sommerdurchschnittstemperaturen in der Regel höher liegen als die in den letzten 140 Jahren.

b) Bildet man den Durchschnitt aller 92 Tagesmittelwerte, so erhält man für den Sommer 2026 in Basel 23,4 °C. Bildet man dann noch mal den Mittelwert über die vier Stationsdurchschnitte, so erhält man für 2026 eine schweizer Sommerdurchschnittstemperatur von 22,7 °C. Der Wert passt zur Temperatur für 2026 in der Grafik.

c) $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

$\Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}(x^2+\mu^2-2\mu x-\sigma^2)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}((x-\mu)^2-\sigma^2)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}}((x-\mu)-\sigma)((x-\mu)+\sigma)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Aus f‘‘(x) = 0 folgt: ((x - μ) - σ)((x - μ) + σ) = 0

$\Rightarrow$ σ = x - μ v σ = μ - x $\Rightarrow$ x = μ + σ v x = μ - σ

Die hinreichende Bedingung erfolgt über das Vorzeichenwechselkriterium:

Da alle übrigen Faktoren positiv sind, muss man nur ((x - μ) - σ)((x - μ) + σ) betrachten.

Fallunterscheidung:

Ist x < μ + σ $\Rightarrow$ x - μ < σ , dann ist ((x - μ) - σ) < 0 und ((x - μ) + σ) > 0.

Insgesamt ist ((x - μ) - σ)((x - μ) + σ) < 0.

Ist x > μ + σ $\Rightarrow$ x - μ > σ , dann ist ((x - μ) - σ) > 0 und ((x - μ) + σ) > 0.

Insgesamt ist ((x - μ) - σ)((x - μ) + σ) > 0.

Insgesamt wechselt also f‘‘(x) bei μ + σ das Vorzeichen.

Verfahre entsprechend für x = μ - σ.

d) Die Wendepunkte liegen etwa bei w_1 = 18,3 °C und w_2 = 20,7 °C, der Erwartungswert in der Mitte: μ = 19,5 °C. Dann gilt: 19,5 - 18,3 = 20,7 - 19,5 = 1,2. σ = 1,2 °C

e) $I_{95\%}$ = [μ -1,96σ; μ + 1,96σ] = [17,15; 21,85]. Für eine normalverteilte Zufallsgröße mit μ = 19,5 °C und σ = 1,2 °C gilt: P(17,15 ≤ X ≤ 21,85) ≈ 0,9498.

f) Die Probe zeigt, dass die Zahlen gut gewählt sind, denn die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert von der 1,96σ-Umgebung überdeckt wird, liegt bei 95 %.

g) Für die Normalverteilung X mit $\mu = 19{,}5$ und $\sigma = 1{,}2$ wird berechnet: $P(X > 22{,}1) = 1 - P(X \leq 22{,}1) \approx 0{,}0151$. Die Wahrscheinlichkeit für ein Auftreten eines solchen Sommers liegt jetzt schon bei ungefähr 1,5 %.
Der Erwartungswert ist in den letzten 20 Jahren von 17,2 °C auf 19,5 °C gestiegen. Würde er sich in den nächsten 20 Jahren ähnlich entwickeln, läge er dann schon bei 21,8 °C. Damit wäre eine Sommerdurchschnittstemperatur von 22,7 °C weniger als eine Standardabweichung entfernt, also gar nicht mehr so unwahrscheinlich.

h) Schlussfolgerung: Die Wahrscheinlichkeit, dass sehr heiße Sommer auftreten, wird immer größer.
Konsequenzen: Man muss Maßnahmen ergreifen, die vor allem den vulnerablen (besonders empfindlichen) Gruppen wie jungen, alten oder kranken Menschen helfen.

i) Welche Aktivitäten gibt es in Ihrer Kommune? Schattenplätze schaffen (Bäume, Sonnensegel, …), öffentliche Trinkwasserbrunnen bauen, ggf. klimatisierte Räume zur Verfügung stellen, Krankenhäuser, Altenheime, Kitas und Schulen klimafreundlich umbauen (Fassadenbegrünung, Rollläden oder Jalousien einbauen etc.) oder notfalls mit Klimageräten ausstatten.

Quelle: für die Aufgabenstellung:

https://www.linkedin.com/posts/erichmfischer_projection-has-become-reality-more-than-activity-7496546806542098432-RizZ?utm_source=share&utm_medium=member_desktop&rcm=ACoAACBywAMBIKX-jteY4xBSbEW6PhaXwuN3T70