BNE-Aufgaben für den Mathematikunterricht

Titel: Das Lohnkrokodil

Einordnung gemäß Orientierungsrahmen für den Lernbereich Globale Entwicklungen:

Globales Entwicklungsziel	**SDG 10:** Politische Maßnahmen beschließen, insbesondere fiskalische, lohnpolitische und den Sozialschutz betreffende Maßnahmen, und schrittweise größere Gleichheit erzielen (Unterziel 10.4)
Kernkompetenzen Lernende können …	**Erkennen** 1.3 … Daten zu ausgewählten Fragestellungen der globalen Entwicklung und zum Nachhaltigkeitsprozess beschaffen und problemorientiert darstellen. 3.2 … durch Modellbildung Prognosen für die künftige globale Entwicklung erstellen und ihre Verlässlichkeit abschätzen **Bewerten** 6.1 … verschiedene mathematische Modelle zu einer Problem-stellung globaler Entwicklung gegeneinander abwägen und ihre Bedeutung für eine nachhaltige Entwicklung prüfen. **Handeln** 9.2 … Möglichkeiten der Mathematik zur Versachlichung von Kommunikation und interkultureller Verständigung bei Fragen der globalen Entwicklung nutzen
mathematische Inhalte	Lineares und exponentielles Wachstum, Funktionenuntersuchung
einsetzbar ab	Jahrgangsstufe: 12

Zusammenfassung

In dieser Aufgabe werden Lohnentwicklung von Akademikern und Ungelernten miteinander verglichen. Mit einer „Was wäre, wenn …“ –Vorgabe zu einer durch bessere Bildung erzielten Lohnsteigerung der Ungelernten werden anschließend die weiteren Entwicklungen und insbesondere die Differenzkurve mit Blick auf die noch lange andauernde Ungleichheit genauer unter die Lupe genommen.

Ab Oberstufe – Analysis – SDG 10 – BNE-Aufgabe

BNE-Aufgaben für den Mathematikunterricht

Das Lohnkrokodil

In den letzten 40 Jahren sind in Deutschland die Akademikerlöhne um 70 Prozent gestiegen, die der Ungelernten um knapp zehn Prozent gefallen. Der Akademiker sonnt sich auf der Nasenspitze des Krokodils, während der ohne Abschluss von den Zähnen herabbaumelnd ums Überleben kämpft. Die guten Löhne zukünftiger Generationen sind nicht nur an sich erstrebenswert, sie sorgen auch für dauerhaft höhere Steuereinkommen und geringere Sozialausgaben und Rentenzuschüsse. Es gibt für eine Regierung kaum eine effektivere Investition als die in Bildung.

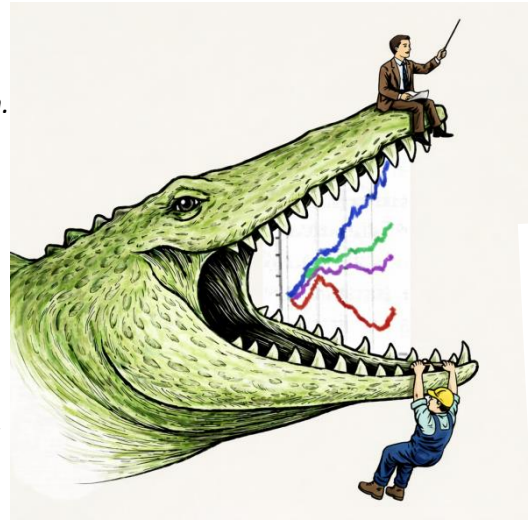


Bild KI-generiert

Philippa Sigl-Glöckner, Gutes Geld. Wege zu einer gerechten und nachhaltigen Gesellschaft, Köln 2024

Aufgabe 1

a) Berechne, wie hoch die jährliche Lohnerhöhung für Akademiker in den letzten 40 Jahren im Durchschnitt war.

b) Berechne den entsprechenden Wert für Ungelernte.

c) Die Kiefer des Krokodils sehen in etwa aus wie Geraden. Berechne die Steigung der beiden Geraden. Gehe für beide Kurven vom Startpunkt (0 | 100) aus (Start vor 40 Jahren mit 100 Prozentpunkten).

d) Erläutere, wieso sich die Werte in den Teilaufgabe a)/b) und c) unterscheiden. Begründe, mit welchem Zu/Abnahmewert man rechnen sollte. Skizziere die unterschiedlichen Lohnkurven zu a) bis c). Kommentiere die Krokodil-Darstellung.

e) Erkläre die letzten beiden Sätze des Textes mit deinen Worten.

Aufgabe 2

Erhöhungen des Mindestlohnes und eine bessere Bildung könnten für eine Besserstellung des „Unterkiefers“ sorgen. Vielleicht führt das statt zu einer Abnahme zu einer Zunahme der unteren Löhne um 1 % oder sogar um 1,5 % jährlich (bei gleichbleibendem Akademikerlohn-Zuwachs).

a) Was bedeutet der 1-%-Wert längerfristig für das Verhältnis der obersten zu der untersten Lohngruppe? Bei welchem Zunahmewert lägen beide nach weiteren 40 Jahren? Wie entwickelt sich der Abstand zwischen ihnen?
Stelle die Lohnkurven und die Differenzkurve auch grafisch dar.

b) Stelle die gleichen Überlegungen für den 1,5-%-Wert an.

c) Aber wegen des größeren jährlichen Zunahmeprozentsatzes (1,5 % gegenüber 1,3 %) wird die Zunahmekurve der Ungelernten-Löhne die der Akademikerlöhne überholen. Das dauert nur. Stelle die Situation bis zum Schnittpunkt grafisch dar samt Differenzkurve. Berechne das Maximum der Differenzkurve und erläutere seine Bedeutung.

d) Bestimme den Schnittpunkt der beiden Kurven und erläutere seine Bedeutung.

BNE-Aufgaben für den Mathematikunterricht

Lösungen

Aufgabe 1

a) $\sqrt[40]{1,7}$ ≈ 1,013 = 101,3 % = 100 % + 1,3 % Die Akademikerlöhne sind in den letzten 40 Jahren durchschnittlich um 1,3 % pro Jahr gestiegen.

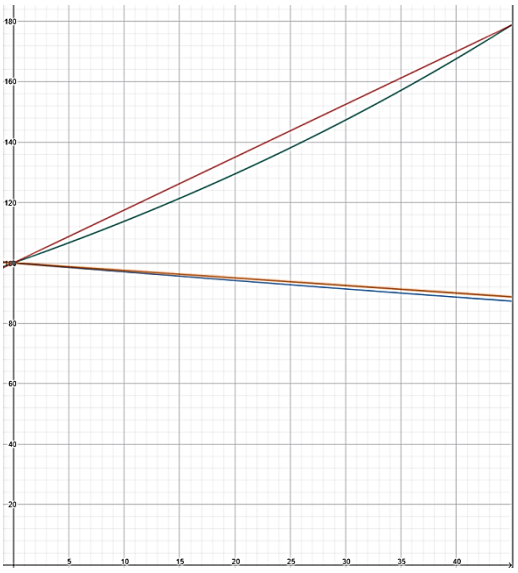
b) $\sqrt[40]{0,9}$ ≈ 0,997 = 99,7 % = 100 % - 0,3 % Die Löhne von Ungelernten sind in den letzten 40 Jahren durchschnittlich um 0,3 % pro Jahr gefallen.

c) Akademiker: $\frac{170-100}{40-0}$ = 1,75 Der Akademiker-„Kiefer“ hat die Steigung 1,75 %.

Ungelernte: $\frac{90-100}{40-0}$ = - 0,25 Der Ungelernte-„Kiefer“ hat die Steigung -0,25 %.

d) In a)/b) wurde exponentiell gerechnet. Der bereits erreichte Lohn wird mit dem Zu/Abnahmeprozentsatz verrechnet. Mit steigendem Lohn nimmt der Zuwachs bzw. die Abnahme zu. In c) wurde linear gerechnet. Jedes Jahr ist die Zunahme bzw. Abnahme gleich.

e) Richtig ist die exponentielle Rechnung. Zukünftige prozentuale Lohnerhöhungen gehen immer vom bereits erreichten Lohn aus. Bei konstantem Prozentsatz nimmt die Zunahme bzw. die Abnahme zu.
Die oberste (rote) Kurve gehört zur linearen Funktion, die darunter zur Exponentialfunktion. Das gleiche gilt für die beiden unteren Kurven. Die Exp-Kurven passen zum Sachverhalt.
Das Krokodilmaul scheint lineare Funktionen zu unterstellen. Naja, die Kurvenabbildungen zeigen die empirischen Kurvenverläufe. Das Krokodilmaul soll wohl nur die Tendenzen zeigen. Die Akademikerlöhne steigen deutlich, die anderen nehmen ab.



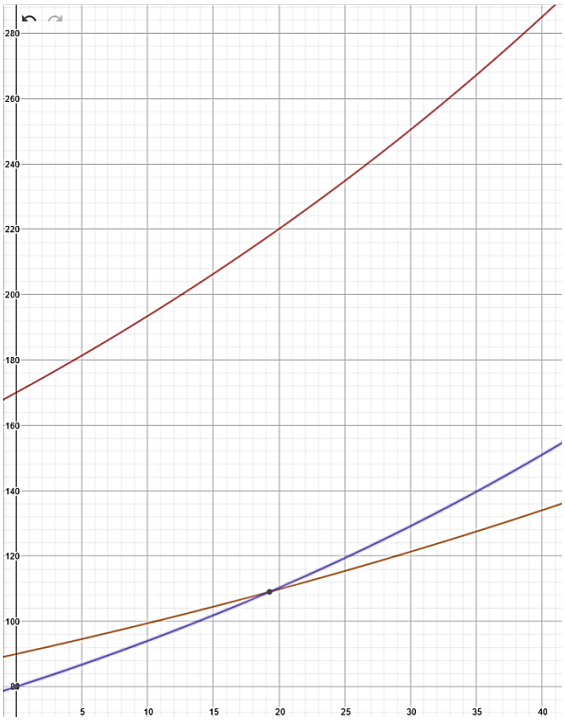
Die Funktionsvorschriften lauten: Akademiker: $A_{exp}(x) = 100 \cdot 1{,}013^x$; $A_{lin}(x) = 100 + 1{,}75x$; Ungelernte: $U_{exp}(x) = 100 \cdot 0{,}997^x$; $U_{lin}(x) = 100 – 0{,}25x$

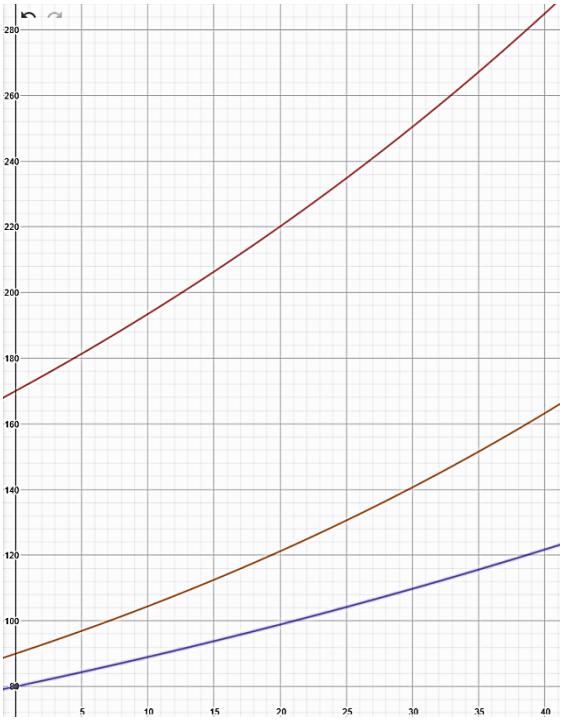
f) Wenn die Bevölkerung gute Löhne bekommt, geht es den Menschen gut. Zudem zahlen sie dann viele Steuern, so dass auch der Staatshaushalt gut funktionieren kann. Deshalb sollte es möglichst keine Ungelernte mehr geben und deren Minilöhne. Das ist zu erreichen, indem alle möglichst gut ausgebildet werden und mit einem Schulabschluss ins Berufsleben starten, d.h. es muss mehr in Bildung investiert werden.

Aufgabe 2

a) Akademiker nach weiteren 40 Jahren: $AII_{exp}(x) = 170 \cdot 1{,}013^x$; $AII_{exp}(40) \approx 285$
Ungelernte nach weiteren 40 Jahren: $UII_{exp}(x) = 90 \cdot 1{,}01^x$; $UII_{exp}(40) \approx 134$
Abstand nach den anfänglichen 40 Jahren: 170 – 90 = 80; nach den weiteren (für Ungelernte besseren) 40 Jahren: 285 – 134 = 151.
Obwohl die Löhne der Ungelernten zunehmen und nicht mehr abnehmen, vergrößert sich der Abstand der Lohnzuwächse. Akademikerlöhne legen insgesamt über 80 Jahre um 185 %

zu, die Löhne der Ungelernten trotz Verbesserung nur um 34 % (haben aber zumindest nicht abgenommen).
Die Abstände nehmen weiter zu, weil die Akademikerlöhne um 1,3 % pro Jahr zunehmen, die der Ungelernte aber nur um 1 %.





In der linken Grafik sind die beiden Lohnentwicklungen und die Differenz dargestellt (blaue Kurve) für die 1-%-Zunahme der Ungelernte-Löhne, rechts die für die 1,5-%-Zunahme.

b) Akademiker nach weiteren 40 Jahren: $AII_{exp}(x) = 170 \cdot 1{,}013^x$; $AII_{exp}(40) \approx 285$
Ungelernte nach weiteren 40 Jahren: $UIII_{exp}(x) = 90 \cdot 1{,}015^x$; $UIII_{exp}(40) \approx 163$
Abstand nach den anfänglichen 40 Jahren: 170 – 90 = 80; nach den weiteren (für Ungelernte noch besseren) 40 Jahren: 285 – 163 = 122
Obwohl die Löhne der Ungelernten mit 1,5 % stärker zunehmen als die der Akademiker mit 1,3 %, vergrößert sich der Abstand der Lohnzuwächse. Akademikerlöhne legen insgesamt über 80 Jahre um 185 % zu, die Löhne der Ungelernten trotz Verbesserung nur um 63 %, wenn auch deutlich stärker als beim 1-%-Zuwachs pro Jahr.
Die Abstände nehmen weiter zu, weil die Akademikerlöhne von größeren Anfangswerten ausgehen: 1,3 % von 170 ist deutlich mehr als 1,5 % von 90.

c) Die Differenzkurve nimmt zunächst zu, erreicht dann einen Hochpunkt (etwa nach 250 + 40 Jahren) und sinkt auf Null (bei etwa 320 + 40 Jahren).
Berechnung des Hochpunktes der Differenzkurve
$d(x) = 170 \cdot 1{,}013^x - 90 \cdot 1{,}01^x \Rightarrow d'(x) = 170 \cdot 1{,}013^x \cdot \ln(1{,}013) - 90 \cdot 1{,}015^x \cdot \ln(1{,}015)$
$\Rightarrow 170 \cdot 1{,}013^x \cdot \ln(1{,}013) = 90 \cdot 1{,}015^x \cdot \ln(1{,}015)$ (notwendige Bedingung)

$$\Rightarrow \frac{170 \cdot \ln(1{,}013)}{90 \cdot \ln(1{,}015)} = \frac{1{,}015^x}{1{,}013^x} \Rightarrow \left(\frac{1{,}015}{1{,}013}\right)^x \approx 1{,}63866$$

$\Rightarrow x \cdot \ln(1{,}00197) = \ln(1{,}63866) \Rightarrow x \approx 251$

Hinreichende Bedingung: Am Graphen ist zu sehen, dass ein Hochpunkt vorliegt. d(251) ≈ 572. Ansonsten kann man den auch schnell über das Vorzeichenwechselkriterium nachweisen.
Der Hochpunkt der Differenzkurve liegt bei H(251 | 572).
In gut 250 + 40 = 290 Jahren wären die Zuwächse der Akademikerlöhne maximal weit von denen der Ungelerntenlöhne entfernt: Vom Startpunkt (etwa 1985) aus gesehen, hätten die Akademikerlöhne 572 Prozentpunkte stärker zugelegt als die Ungelerntenlöhne.

Akademikerlohn-Zuwachs: (251 | 4349); Ungelerntenlohn-Zuwachs: (251 | 3778)
Der maximale Abstand findet sich in den beiden Kurvenpunkten wieder: 4349 – 3778 = 571.

d)

